**به نام او**

**پاسخ تمرینات سری دوم – فصل دوم**

۱. الف)

حال فرض می‌کنیم . پس ما نشان دادیم که و به طور مشابه میتوانیم نشان دهیم . پس وارون ماتریس می‌باشد.

ب) غلط. مثال نقض: که وارون پذیر است و و معادله به فرم درمی‌آید و بر قرار است.

2. فرض می‌کنیم . پس .

حال داریم :

و از طرفی داریم :

با توجه به عبارت بالا سمت راست و چپ تساوی پس از ساده سازی به مقدار یکسان رسیدند پس تساوی برقرار است.

3. راه اول:

راه دوم: برهان خلف.

فرض خلف : وارون پذیر نیست.

پس معادله جواب غیر بدیهی (غیر صفر) دارد. حال را از سمت چپ در این معادله ضرب می‌کنیم و به عبارت می‌رسیم و از عبارت قبل می‌دانیم که مخالف صفر است. حال می‌توانیم را در نظر بگیریم و معادله خود را به صورت بازنویسی کنیم که شکل دیگری از معادله‌ی می‌باشد. و از آنجایی که غیر صفر است، پس وارون پذیر نیست و این خلاف فرض سوال است و فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود.

4. الف)

ب) درایه‌های محوری در ماتریس باید مخالف صفر باشند. بنابراین:

5.

6. الف) فرض کنید شامل تمام بردارهایی است که در عبارت ریاضی زیر صدق می‌کنند:

اگر و باشد آنگاه که عضو S است. فرض کنید و . از آنجاییکه تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است، می‌توان گفت که یک زیرفضا می‌باشد.

ب) فرض کنید S شامل تمام بردار هایی است که در عبارت ریاضی زیر صدق می‌کنند:

اگر و باشد آنگاه که عضو S نمی‌باشد. بنابراین از آنجاییکه تحت عملیات جمع بسته نیست، یک زیر فضا نمی‌باشد.

ج) فرض کنید S شامل تمام بردارهایی است که در عبارت ریاضی زیر صدق می‌کنند:

اگر و باشد آنگاه است. برای آنکه عضو باشد باید :

داریم:

از آنجاییکه تحت جمع بسته نیست، می‌توان نتیجه گرفت که زیرفضا نمی‌باشد.

د) فرض کنید شامل تمام بردارهایی است که در عبارت ریاضی زیر صدق می‌کنند:

و داریم:

اگر داریم:

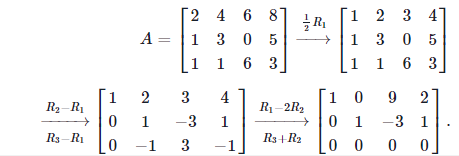
از آنجاییکه S تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است، می‌توان گفت یک زیرفضا می‌باشد.

ه) فرض کنید شامل تمام بردار هایی است که در عبارت ریاضی زیر صدق می‌کنند:

داریم:

و بدیهی است که تحت عملیات ضرب اسکالر نیز بسته است پس می‌توان گفت یک زیرفضا می‌باشد.

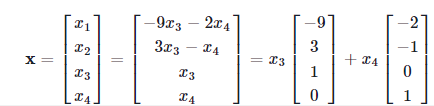
7. ابتدا ماتریس کاهش‌یافته ردیفی را برای ماتریس پیدا می‌کنیم:



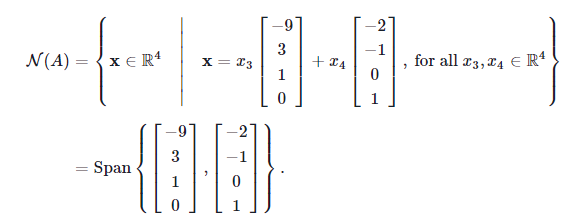
الف) با محاسبات بالا می‌توان فهمید جواب عمومی معادله به صورت زیر است:



که و متغیر های آزاد هستند. بنابر این بردار جواب برای برابر است با:

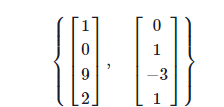


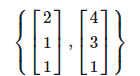
که میتوان از روی آن را برای این ماتریس پیدا کرد:



بنابراین می‌توان فهمید این 2 بردار که مستقل خطی‌اند و را می‌کنند، یک پایه برای آن می‌باشند.

ب) ردیف‌های غیرصفر ماتریس کاهش یافته یک پایه برای فضای سطری این ماتریس هستند:



ج) ستون‌هایی از ماتریس که متناظر با ستون‌های دارای در ماتریس کاهش‌یافته‌اند، تشکیل یک پایه برای را می‌دهند.

د) برای بردارهای ستونی ، بردار های را در نظر می‌گیریم. در قسمت قبل نشان دادیم که بردارهای یک پایه برای تشکیل می‌دهند. بنابراین باید را به عنوان ترکیب خطی ۲ بردار دیگر بنویسیم. از آنجایی‌که ماتریس کاهش‌یافته را قبلا محاسبه کرده بودیم، به سادگی می‌توان دریافت که درایه‌های سومین ستون این ماتریس ضرایب ترکیب خطی و درایه های ستون ۴ ضرایب ترکیب خطی را می‌دهند.



8. الف) اگر یک پایه دلخواه برای زیرفضای باشد هدف ما نشان دادن است.

از آنجاییکه یک پایه است، می‌توان گفت که یک شامل بردار برای می‌باشد. پس مجموعه‌ای از و یا تعداد بیشتر بردار در وابسته‌ خطی می‌باشند. از آنجایی‌که B’ یک پایه است، پس مستقل خطی است. پس می‌باشد.

از طرفی ‌B’ یک پایه است پس یک برای می‌باشد که دارای بردار است. پس می‌توان گفت هر مجموعه دارای و یا تعداد بیشتر بردار در وابسته خطی است. از طرفی نیز یک پایه است که مستقل خطی است. پس است.

می‌توان نتیجه گرفت که می‌باشد.

ب) برای ماتریس به نام می‌توان گفت آن دارای بردارهای ای می‌باشد که . پس باید *n-dimensional* باشد. از آنجاییکه یک زیرفضا از است، می‌توان نتیجه گرفت .

ماتریس شامل بردارهای ای است که به طوری که . بنابراین باید *m-dimensional* باشد. پس یک زیرفضا از است و .

از آنجایی‌که یک صفحه یک زیرفضای ۲بعدی است، پس و توسط یک بردار ، می‌شود. بنابر این یک پایه برای است و .

همچنین می‌توان نوشت :

پس و و .

9. اگر یک بردار عضو به صورتی که باشد، آنگاه بر اساس عبارت زیر باید بردار صفر باشد (تمام المان‌های این بردار صفر است)

حال برای اینکه همواره جواب بدیهی داشته باشد، نباید تعداد ستون‌هایش از تعداد سطرهایش بیشتر باشد؛ زیرا در این صورت متغیر آزاد خواهیم داشت و دیگر تنها جواب ما جواب بدیهی نخواهد بود پس .

به ازای هر عضوداریم :

و می‌توان نتیجه گرفت جواب دارد و باید به ازای هر دلخواه جواب داشته باشد . حال باید سطر و ستون‌های ماتریس به شکلی باشد که به ازای هر دلخواه بتوان جوابی برای معادله یافت و این یعنی نباید تعداد سطرهای ماتریس از تعداد ستون‌هایش بیشتر باشد زیرا در این صورت سطرهایی وجود خواهند داشت که در آن ها المان محوری وجود ندارد و این امکان ایجاد ناسازگاری را به همراه دارد. پس .

حال از رابطه و نتیجه می‌شود که .

حال برای اثبات C =D داریم :

پس .

موفق باشید

تیم تدریس‌یاری جبرخطی

بهار 1400